

Lista 1 — Primos e Divisibilidade

Parte 1: como a UnB cobra (11 itens) · Parte 2: outros vestibulares (15 questões)

Como usar: comece pela **Parte 1**, que é do vestibular da UnB, no mesmo estilo do PAS. **C/E** = julgue Certo ou Errado; **B** = resposta numérica; **A-E** = múltipla escolha. Gabarito comentado na última página.

PARTE 1 · COMO A UNB COBRA

Vestibular da UnB (CESPE/CEBRASPE)

A mesma banca do PAS: texto-base e itens para julgar.

TEXTO-BASE · ITENS 1 E 2

Um ano tem 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos, o que explica a necessidade dos anos bissextos, que incluem um dia a mais no calendário: 29 de fevereiro. De modo geral, um ano é bissexto se for múltiplo de 4, como, por exemplo, 2000, 2004, 2012. Entretanto, essa regra somente estaria exata se o ano durasse 365 dias e 6 horas. A partir de 1583, um ajuste no calendário criou as regras para se determinar se um ano $X > 1583$ é um ano bissexto:

- I. se X for múltiplo de 400, então X será bissexto;
- II. se X **não** for múltiplo de 400, mas for múltiplo de 100, então X não será bissexto;
- III. se X **não** for múltiplo de 100, mas for múltiplo de 4, então X será bissexto;
- IV. se X **não** for múltiplo de 4, então X **não** será bissexto.

Vestibular UnB 2015 (CESPE), 2º dia

1) **C/E** O ano 1866 foi um ano bissexto, pois é múltiplo de 4.

2) **C/E** O ano 2000 foi o primeiro ano bissexto, conforme determinado pela regra I.

TEXTO-BASE · ITEM 3

O “efeito dominó” é a situação na qual são enfileiradas várias peças de dominó apoiadas no chão sobre sua menor base. Ao se derrubar a primeira peça, todas as demais caem sequencialmente, uma após a outra. Suponha que, em um arranjo hipotético, uma infinidade de peças de dominó tenha sido corretamente emparelhada em uma única fileira e que a cada uma delas tenha sido atribuído um número inteiro positivo, de acordo com a ordem em que elas caíam. Assim, por exemplo, a peça de número 13 é a décima terceira a cair. Nesse arranjo, a primeira peça é amarela, as peças correspondentes a números primos são vermelhas e as demais são pretas.

- 3) ☐ C/E Há exatamente um par de peças vermelhas consecutivas.

TEXTO-BASE · ITEM 4

Um apicultor, ao perceber o desaparecimento de abelhas de uma colmeia, resolveu contar a quantidade de abelhas restantes para estimar a taxa correspondente ao sumiço dos insetos. Utilizando técnicas adequadas, ele conseguiu atrair as abelhas restantes da colmeia para o interior de uma caixa cercada por uma tela. O apicultor observou que as abelhas entravam na caixa de modo bastante peculiar, seguindo um padrão: primeiro, entrava uma; depois, mais três de uma única vez; logo em seguida, mais cinco ao mesmo tempo; imediatamente após, entravam sete, e, assim, sucessivamente. Para obter controle sobre o processo, ele anotou a quantidade de abelhas que entravam e verificou que nenhuma abelha saiu da caixa enquanto ele fazia a contagem. Ao final, contou 400 abelhas dentro da caixa.

Vestibular UnB 2012 (CESPE), prova 2 · com adaptações

- 4) ☐ C/E Em algum momento, a quantidade de abelhas que entraram simultaneamente na caixa correspondeu a um número não primo.

TEXTO-BASE · ITEM 5

O matemático grego Eratóstenes inventou, no século III a.C., um método para determinar os números primos inferiores a dado número. A este método dá-se o nome de crivo de Eratóstenes. Por exemplo, para se determinar os números primos até 100, começa-se construindo um quadro com os números de 1 a 100, em 10 linhas de 10. No quadro, procede-se, então, da seguinte maneira:

- 1.º passo – risca-se o 1, que não é primo;
- 2.º passo – risca-se todo múltiplo de 2, com exceção do próprio 2, que é primo;
- 3.º passo – risca-se todo múltiplo de 3, com exceção do próprio 3, que é primo;
- 4.º passo – risca-se todo múltiplo de 5, com exceção do próprio 5, que é primo.

O procedimento é continuado até que sejam riscados (crivados) todos os números compostos, isto é, múltiplos de algum primo. Os que sobram são os números primos.

Vestibular UnB 2010 (CESPE), 1º semestre de 2011, 2º dia · com adaptações

- 5) ☐ B Procedendo como Eratóstenes, determine qual é o vigésimo primeiro número primo, quando os números são listados em ordem crescente de valor.

TEXTO-BASE · ITENS 6 A 11

O conceito de número primo, um número natural maior que 1, divisível apenas por 1 e por ele mesmo, remonta aos matemáticos da Grécia Antiga. Por volta de 350 a.C., Euclides provou que qualquer número inteiro maior que 1 ou é primo ou pode ser escrito como o produto de números primos de forma única, exceto pela ordem em que os primos são escritos. Essa propriedade, que é formalizada por meio do teorema fundamental da aritmética, pode ser transposta à química, estabelecendo uma comparação entre números primos e átomos: blocos fundamentais a partir dos quais os números/estruturas moleculares são construídos. Assim como conhecer a estrutura molecular única de uma substância pode nos dizer muito sobre suas propriedades, conhecer a decomposição única de um número em fatores primos pode nos dizer muito sobre suas propriedades matemáticas.

Euclides provou indiretamente que existem infinitos números primos ao mostrar que não existe o maior número primo. Supondo que existisse tal número e representando-o pela letra P, Euclides provou que, ao se multiplicar todos os números primos de 2 a P, incluindo estes, e acrescentando-se 1 ao resultado, obtém-se um novo número primo, naturalmente maior que P.

Outro fato importante é que, à medida que se consideram números cada vez maiores, os primos parecem escassear. Enquanto existem 4 primos menores que 10, existem apenas 25 menores que 100, só 168 menores que 1.000 e 1.229 menores que 10.000. Podemos considerar esses dados como a taxa média segundo a qual os primos surgem: 0,4 abaixo de 10; 0,25 abaixo de 100; 0,168 abaixo de 1.000; e 0,1229 abaixo de 10.000. Essas quantidades podem ser tomadas como “densidades” (D_N) dos primos menores ou iguais ao número natural N, calculadas assim: $D_N = P(N) / N$, em que $P(N)$ é o total de primos menores ou iguais a N. Assim, ficam as perguntas: D_N diminui à medida que N aumenta, ou chega-se a um ponto em que a situação se inverte e encontram-se agrupamentos de primos? Existe algum tipo de padrão para a maneira como os primos se localizam no conjunto dos números naturais, ou eles se distribuem de maneira caótica?

Em 1791, quando tinha apenas 14 anos de idade, Gauss percebeu que a densidade dos primos é aproximadamente igual a $1 / \ln(N)$, em que $\ln(N)$ é o logaritmo natural de N. De acordo com Gauss, quanto maior for N, melhor será essa aproximação.

Keith J. Devlin. Os problemas do milênio. Rio de Janeiro: Record, 2004, p. 34-49 (com adaptações). Vestibular UnB 2010 (CESPE), 1º semestre de 2011, 2º dia.

6) ☐ C/E Se $G(N) = N / \ln(N)$, com $N > 1$, então $e^{1/G(N)} = N\sqrt{N}$, em que e é a base do logaritmo natural.

7) ☐ C/E Sabendo-se que de 1 a 10.000.000 existem 664.579 números primos, há chance de, aproximadamente, 1 em cada 15 números com sete algarismos ser primo.

8) ☐ C/E Se $P(N + 1) - P(N) \neq 0$, então $N + 1$ é um número primo.

9) (C/E) Para todo número inteiro N maior que 1, vale a desigualdade $P(N) < N$.

10) (C/E) Se os pares $(N, P(N))$ forem representados em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, então esses pares ordenados pertencerão a uma mesma reta.

11) (C/E) A analogia apresentada no texto entre números primos e átomos é parcialmente inadequada porque os átomos podem ser subdivididos em unidades que preservam as características atômicas, enquanto os números primos não podem ser decompostos.

PARTE 2 · OUTROS VESTIBULARES

Do mais direto ao mais desafiador

FUVEST, UNICAMP, UERJ, UECE e outros. A origem está em cada questão.

12) (A-D) De acordo com o teorema fundamental da aritmética, todo número natural maior do que 1 é primo ou é um produto de números primos. Observe os exemplos: $1964 = 2^2 \times 491$ e $1994 = 2 \times 997$. O maior número primo obtido na fatoração de 1716 é:

A 17 B 13 C 11 D 7

UERJ 2021 · Exame Único

13) (A-D) Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos nos quais aparecem apenas os algarismos 1, 3 e 5, repetidos ou não, que são divisíveis por 5?

A 6. B 15. C 9. D 12.

UECE 2022 · Conhecimentos Gerais, 1ª fase

14) (A-E) Sobre os números primos, é correto afirmar:

- A Todos os números primos são ímpares.
- B Existem, no máximo, 7 trilhões de números primos.
- C Todo número da forma $2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, é primo.
- D Entre 24 e 36, existem somente 2 números primos.
- E O número 143 é um número primo.

FUVEST 2021 · adaptada: a questão original partia de um quadrinho sobre números primos ("Cientirinhas #143"), omitido aqui

15) (A-E) O número de divisores positivos de 315.000 é:

- A 120 B 100 C 130 D 200 E 210

URCA 2017

16) (A-E) Dado um número natural $n \geq 2$, o *primorial* de n , denotado por $n\#$, é o produto de todos os números primos menores que ou iguais a n . Por exemplo, $6\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. O **menor** número da forma $n\#$ que é maior que 2000 é:

- A 2300 B 2305 C 2310 D 2312 E 2322

FUVEST 2022 · 1ª fase

17) (A-D) Considere $A = \{x \in \mathbb{N} : |x - 5| \geq 2 \text{ e } |x - 11| \leq 9\}$. Quantos números primos pertencem ao conjunto A ?

- A 5. B 6. C 7. D 8.

UNICAMP 2025 · Conhecimentos Gerais

18) (A-D) O código de uma inscrição tem 14 algarismos; dois deles e suas respectivas posições estão indicados abaixo.

5				8				x					
---	--	--	--	---	--	--	--	---	--	--	--	--	--

Considere que, nesse código, a soma de três algarismos consecutivos seja sempre igual a 20. O algarismo representado por x será divisor do seguinte número:

- A 49 B 64 C 81 D 125

UERJ 2012 · Segundo Exame

19) (A-E) Determine o menor inteiro positivo N com a seguinte propriedade: N deixa resto 3 quando dividido por 5 e deixa resto maior possível na divisão por 7.

- A 38 B 48 C 13 D 23 E 58

URCA 2017

20) (A-D) Se o número natural p possui exatamente três divisores positivos e satisfaz a desigualdade $100 < p < 150$, então o número $q = 3\sqrt{p}$ cumpre a condição

- A $25 < q < 31$. B $35 < q < 39$. C $20 < q < 25$. D $31 < q < 35$.

UECE 2019 · Matemática, 1º dia

21) (A-D) Se o resto da divisão do número inteiro positivo b por 7 é igual a 5, então o resto da divisão do número $b^2 + b + 1$ por 7 é igual a

- A** 2. **B** 4. **C** 3. **D** 5.

UECE 2019 · Matemática, 1º dia

22) (A-E) Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz-se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b .
Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

- A** 8 e 9. **B** 9 e 10. **C** 10 e 12. **D** 15 e 20. **E** 16 e 25.

FUVEST 2016 · 1ª fase

23) (A-D) O número de divisores inteiros e positivos do número $2018^2 - 2017^2$ é

- A** 8. **B** 14. **C** 10. **D** 12.

UECE 2017 · 1º semestre

24) (A-E) Se o número natural $N = 2a35b$, no qual a e b são os algarismos das unidades de milhar e das unidades simples, respectivamente, é divisível por 6, quantos são os pares de algarismos (a, b) ?

- A** 12 **B** 14 **C** 15 **D** 16 **E** 17

UPE 2021 · 1ª fase, 1º dia

25) **(A-E)** Existem números curiosos na matemática. Os números perfeitos são alguns deles. Um número n (para $n \in \mathbb{N}^*$) é perfeito se, e somente se, for igual à soma de seus divisores positivos (excluindo o próprio). Relacionando números perfeitos e números primos, Euclides escreveu uma proposição em seu famoso livro “Elementos”: se $2^n - 1$ é um número primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito. Considerando o que foi exposto, é correto afirmar:

- A** Com exceção de $n = 1$, os 5 primeiros termos da sequência $(a_n) = (2^n - 1)$ são números primos.
- B** Os termos da progressão geométrica, cujo primeiro termo é o primeiro número perfeito e cuja razão é 3, são pares.
- C** Os números 28 e 31 são números perfeitos.
- D** Na proposição de Euclides, para $n = 4$, obtemos que $2^n - 1$ não é primo, mas que $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito.
- E** A sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de $(a_n) = (2^n - 1)$ é uma progressão aritmética de razão 2.

FUVEST 2025 · 1ª fase

26) **(A-D)** Existem dois números de cinco algarismos distintos que satisfazem às seguintes condições: • ambos são divisíveis por 9 e por 5; • o segundo algarismo é o dobro do primeiro e a soma desses dois algarismos é 6; • o quarto algarismo é a soma do primeiro e do terceiro algarismos. Nessas condições, a diferença entre o maior número e o menor número é um número

- A** maior do que 3^5 .
- B** múltiplo de 5, mas não múltiplo de 3.
- C** primo.
- D** quadrado perfeito.

UEMG 2022

Gabarito comentado — Lista 1 • Primos e Divisibilidade

PARTE 1 • VESTIBULAR DA UNB

1) E	$1866 \div 4 = 466,5$: 1866 não é múltiplo de 4, logo (regra IV) não foi bissexto.
2) E	Antes de 2000 já houve muitos bissextos depois de 1583 (1584, 1588, ...). A regra I não faz de 2000 o primeiro.
3) C	Dois primos consecutivos só podem ser 2 e 3: em qualquer outro par de inteiros vizinhos, um deles é par e maior que 2.
4) C	Entram 1, 3, 5, 7, ... (ímpares). A soma dos n primeiros ímpares é n^2 ; $400 = 20^2$, então entraram os 20 primeiros ímpares (1 a 39). Entre eles há o 1, o 9, o 15... que não são primos.
5) 73	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 .
6) C	$1/G(N) = \ln(N)/N$, então $e^{\ln(N)/N} = (e^{\ln N})^{1/N} = N^{1/N} = N\sqrt[N]{N}$.
7) C	Dos 664.579 primos até 10^7 , 78.498 têm menos de 7 algarismos; sobram 586.081 entre os 9.000.000 números de 7 algarismos: $586.081 \div 9.000.000 \approx 1/15,4$.
8) C	P só aumenta quando aparece um primo novo: se $P(N+1) \neq P(N)$, o número que entrou na contagem é $N + 1$.
9) C	O 1 não é primo, então entre 1 e N há no máximo $N - 1$ primos: $P(N) \leq N - 1 < N$.
10) E	Os pontos (10, 4), (100, 25) e (1000, 168) não estão alinhados: as taxas $21/90$ e $143/900$ são diferentes (a densidade cai).
11) E	Os átomos podem ser divididos (prótons, nêutrons, elétrons), mas essas partes não preservam as características do átomo. A justificativa do item está errada.

PARTE 2 • OUTROS VESTIBULARES

12) B	$1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$. O maior primo é 13.
13) C	Divisível por 5 com esses algarismos: termina em 5. As outras duas posições: $3 \cdot 3 = 9$.
14) D	Entre 24 e 36: 29 e 31. (2 é primo e par; $2^3 + 1 = 9$; $143 = 11 \cdot 13$; os primos são infinitos.)
15) A	$315.000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7 \rightarrow (3+1)(2+1)(4+1)(1+1) = 120$.
16) C	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 < 2000$; $210 \cdot 11 = 2310 > 2000$.
17) C	$ x - 11 \leq 9 \rightarrow 2 \leq x \leq 20$; $ x - 5 \geq 2 \rightarrow x \leq 3$ ou $x \geq 7$. $A = \{2, 3, 7, 8, \dots, 20\}$. Primos: 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19 = 7.
18) A	Se toda soma de 3 vizinhos é 20, o código se repete de 3 em 3: posições 1, 4, 7... = 5; 2, 5, 8... = 8; 3, 6, 9... = x . $5 + 8 + x = 20 \rightarrow x = 7$, que divide 49.

19) C	O maior resto na divisão por 7 é 6: $N = 6, 13, 20, \dots$ O primeiro que deixa resto 3 por 5 é 13.
20) D	Três divisores $\Leftrightarrow p = (\text{primo})^2$. Entre 100 e 150: $121 = 11^2$. $q = 3 \cdot 11 = 33$.
21) C	Troque b por 5: $25 + 5 + 1 = 31 = 4 \cdot 7 + 3$. Resto 3.
22) E	Soma dos divisores: $16 \rightarrow 1+2+4+8+16 = 31$; $25 \rightarrow 1+5+25 = 31$.
23) A	$2018^2 - 2017^2 = (2018 - 2017)(2018 + 2017) = 4035 = 3 \cdot 5 \cdot 269$ (269 é primo) $\rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
24) E	Por 2: $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Por 3: $10 + a + b$ múltiplo de 3. Contando a de 0 a 9 para cada b: $3 + 4 + 3 + 3 + 4 = 17$.
25) B	O 1º perfeito é 6; a PG 6, 18, 54, ... tem todos os termos pares. (15 e 63 não são primos; 31 não é perfeito; $n = 4$ dá 120, que não é perfeito; as diferenças 2, 4, 8, ... formam PG.)
26) D	$1^\circ = 2$, $2^\circ = 4$. Por 5: termina em 0 ou 5; por 9: soma múltipla de 9. Saem 24570 e 24795. Diferença $225 = 15^2$.